数理解析研究所講究録
77巻 1969年 82-91

Infinite tensor products of von Neumann algebras

東工大 理　中神祥臣

§1. 序

無限次元空間上の測度の問題は古くは変分学，確率論等の要求から始められたが最近ではその他にも場の理論に現われる表現の問題や Feymann 積分の基礎付け等からも要請が起っている．関数解析の立場からそれを扱う方法は主として次の三つのものが考えられる．Gelfand や Minlos 等による cylindrical measure を可算加法的な測度にかえす議論，Segal や Gross 等による weak distribution の方法，それに Friedrichs や Shapiro 等による汎関数の積分であるが，測度を問題にする限りこれらとは別に Choquet 等による方法もある．また Gelfand 等と同一の流れと考えられるものに今春の関数解析国際会議で講演のあった Schwartz の仕事があり，数年前に彼により Paris 大学で行われた講義録も東大から出されている．

以上はお話であり本論とは直接関係はないが，上で行われた仕事の中の着想を念頭に置きながら von Neumann algebra の問題を考え，逆にそこで得られた結果から測度の様子を調べてみようというのが著者の意図であり，それはまた同時に finite von Neumann algebra に新たな視点を与えることに成るのではないかというかすかな期待が含まれている．未だこれらの目的が果せた訳ではないが取り敢えず，以上のような主旨で話を始めることにする．必然的に最初に測度の存在の問題が起ってくる．それを von Neumann algebra の方で云えば finite von Neumann algebra の無限テンソル積上に果して finite normal trace が存在するかどうか，つまり finite part があるかどうかという問題になるが，その扱いを容易ならしめるために無限テンソル積の各成分で与えられた finite normal trace の無限テンソル積が再び finite normal に成るための条件はなんであろうかという問に答えるべくその様子を調べて行くことにする．

§2. 定義と結果

I を無限濃度を持つ添字集合とし，各 $\iota \in I$ に対し non trivial なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_\iota$ とその上の von Neumann algebra $\mathfrak{A}_\iota$ が与えられているものとする．$\mathfrak{H}_\iota$ の元を

$x_\iota, y_\iota, \cdots$ などで表わす．

定義1．Co-sequence (x_ι) と (y_ι) は

$$\sum |(x_\iota, y_\iota)-1| < +\infty$$

となるとき equivalent，また或るユニタリ作用素 $U_\iota \in \mathfrak{A}_\iota'$ が存在し

$$\sum |(U_\iota x_\iota, y_\iota)| < +\infty$$

となるとき $(\mathfrak{A}_\iota)$ に関し weakly equivalent と云い，それぞれ $(x_\iota) \approx (y_\iota)$，$(x_\iota) \underset{\mathfrak{A}}{\approx} (y_\iota)$ で表わす．

定義2．Co-sequence 全体の集合を関係 $\approx$ 又は $\underset{\mathfrak{A}}{\approx}$ で類別して得られる集合をそれぞれ Γ, $\Gamma(\mathfrak{A})$，その元を C, $C(\mathfrak{A})$ と表わす．

定義3．$(x_\iota) \in C$ 又は $(x_\iota) \in C(\mathfrak{A})$ に対応する $\otimes \mathfrak{H}_\iota$ のベクトル $\otimes x_\iota$ から生成される $\otimes \mathfrak{H}_\iota$ の部分空間をそれぞれ $\otimes^{C} \mathfrak{H}_\iota$, $\otimes^{C(\mathfrak{A})} \mathfrak{H}_\iota$ と表わし，$\otimes \mathfrak{H}_\iota$ からそれぞれの部分空間上への射影作用素を P_C, $P_{C(\mathfrak{A})}$ と表わす．

補助定理1．U_ι を $\mathfrak{H}_\iota$ 上のユニタリ作用素とすると任意な Co-sequence (x_ι) に対して

$$U(\otimes x_\iota) = \otimes U_\iota x_\iota$$

となるようなユニタリ作用素 U が $\otimes \mathfrak{H}_\iota$ 上に一意に存在する．これを $\otimes U_\iota$ と表わす．

補助定理2．U_ι は $\mathfrak{A}_\iota'$ のユニタリ作用素，$C \in \Gamma$, $C(\mathfrak{A}) \in \Gamma(\mathfrak{A})$

とすると，$\otimes U_\iota$，P_ε，$P_{\varepsilon(\mathfrak{A})}$ は $(\otimes \mathfrak{A}_\iota)'$ の元である．

補助定理3．任意な ε，$\varepsilon' \in \Gamma$ に対して

$$P_{\varepsilon'}(\otimes \mathfrak{A}_\iota)' P_\varepsilon = P_{\varepsilon'}(\otimes \mathfrak{A}_\iota') P_\varepsilon$$

となる．

定理1．$\otimes \mathfrak{H}_\iota$ 上の作用素Aが $A \in \otimes \mathfrak{A}_\iota$ となるための必要十分条件はAがあらゆる $\otimes U_\iota$ や P_ε と可換になることである．ただし U_ι は $\mathfrak{A}_\iota'$ のユニタリ作用素，$\varepsilon \in \Gamma$ である．

系1．$\varepsilon \subset \varepsilon(\mathfrak{A})$ のとき，$P_{\varepsilon(\mathfrak{A})}$ は P_ε の central carrier に成っている．

定理2．A_ι は非負であるが0ではない $\mathfrak{A}_\iota$ の作用素とする．このとき任意な C_0-sequence (x_ι) に対し

$$A(\otimes x_\iota) = \otimes A_\iota x_\iota$$

となるような非負でしかも0でない $\otimes \mathfrak{A}_\iota$ の作用素Aが存在するための必要十分条件は

$$\sum \big| \|A_\iota\| - 1 \big| < +\infty$$

でしかも高々可算個の添字 ι を除いて A_ι は固有値1を持っていることである．このときの A を $\otimes A_\iota$ と表わす．

系2．E_ι を $\mathfrak{A}_\iota$ の射影作用素とする．$\otimes E_\iota$，E_ι の値域となっている $\otimes \mathfrak{H}_\iota$，$\mathfrak{H}_\iota$ の部分空間をそれぞれ $\mathfrak{K}$，$\mathfrak{K}_\iota$ とすると，$\mathfrak{K} = \otimes \mathfrak{K}_\iota$ となる．

定理3．A_ι は0でない $\mathfrak{A}_\iota$ の作用素とする．もし

$$\sum \|1-A_\iota\| < +\infty$$

ならば，$\otimes\mathfrak{A}_\iota$ の 0 でない作用素 A が存在して，任意な C_0-sequence (x_ι) に対して

$$A(\otimes x_\iota) = \otimes A_\iota x_\iota$$

となる．これを $\otimes A_\iota$ と表わす．

補助定理 4. 任意な $(x_\iota) \in \mathfrak{C}$，$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ に対して

$$E^{\otimes\mathfrak{A}_\iota}_{\otimes x_\iota} = (\otimes E^{\mathfrak{A}_\iota}_{x_\iota}) P_{\mathfrak{C}} \quad , \quad E^{(\otimes\mathfrak{A}_\iota)'}_{\otimes x_\iota} = (\otimes E^{\mathfrak{A}_\iota'}_{x_\iota}) P_{\mathfrak{C}(\mathfrak{A})}$$

となる．

定義 4. φ を或る von Neumann algebra 上で定義された normal な正値線形汎関数とする．

$$\gamma = \sup\left\{ \|x_1\| : \varphi = \sum_{i=1}^\infty \omega_{x_i},\ \|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \right\}$$

もし $\gamma = \omega_{x_1}(1)$ ならば x_1 を φ の characteristic ベクトルという．

補助定理 5. $\mathfrak{A}$ を coupling operator C を持つ finite von Neumann algebra，φ をその上の $\varphi(1) = 1$ なる finite normal trace とすれば，characteristic ベクトル x が存在し

$$\|x\|^2 = 1 - \varphi((1-C)^+)$$

となる．

定理 4. $\mathfrak{A}_\iota$ を coupling operator C_ι を持つ finite von Neumann algebra とする．

(i) φ_ι を $\mathfrak{A}_\iota$ 上の $\varphi_\iota(1) = 1$ なる normal trace と

したとき，もし

$$\sum \varphi_\iota((1-C_\iota)^+) < +\infty$$

ならば，$\otimes \mathfrak{A}_\iota$ 上に normal trace φ が唯一つ存在して，I の任意な有限部分集合 K に対し

$$\varphi((\underset{K}{\otimes} A_\iota)\otimes(\underset{K^c}{\otimes} 1)) = \prod_K \varphi_\iota(A_\iota)$$

となる．このときの φ を $\otimes \varphi_\iota$ で表わす．

(ii) φ を $\otimes \mathfrak{A}_\iota$ 上の $\varphi(1)=1$ なる normal trace とし φ_ι を φ の $\mathfrak{A}_\iota \otimes (\underset{\kappa\neq\iota}{\otimes} \mathbb{C}_\kappa)$ 上への制限に対応する $\mathfrak{A}_\iota$ 上の normal trace とする．もし I の任意な有限部分集合 K に対して

$$\varphi((\underset{K}{\otimes} A_\iota)\otimes(\underset{K^c}{\otimes} 1)) = \prod_K \varphi_\iota(A_\iota)$$

となるならば，

$$\sum \varphi_\iota((1-C_\iota)^+) < +\infty$$

となる．

系3．定理2，3，4と同じ仮定の下で

$$(\otimes \varphi_\iota)(\otimes A_\iota) = \prod \varphi_\iota(A_\iota)$$

となる．

系4．$\mathfrak{A}_\iota$ を coupling operator C_ι を持つ finite von Neumann algebra とする．$\mathfrak{A}_\iota$ 上の $\varphi_\iota(1)=1$ なる normal trace φ_ι の carrier を G_ι，その characteristic ベクトルを x_ι とする．このとき $\otimes \varphi_\iota$ の carrier は $(\otimes G_\iota)P_{E(\alpha)}$

となる．ただし $(x_\iota) \in C(\alpha)$ である．

§3．補説

§2の詳しい説明は［3］を見ていただくことにして，上の各命題に少し説明を加える．

定義1は von Neumann ［5］の weak equivalence を拡張したものである．これは系1と4で有用になる．

補助定理3は冨田［4］の commutant はテンソル積を保存するという定理を使っているがその証明法は荒木・Woods［1］と同様の方法によっている．

定理1と系1は von Neumann［5］で $\mathcal{L}(\otimes \mathfrak{H}_\iota)$ に対して得られた定理 IX，X の一般化になっている．

定理2と3は 0−1 法則の代数的な拡張とも考えられ，その様子は系3を合わせ考えると一層明瞭になる．

定義4は測度の Fourier 変換，つまり特性関数を念頭に導入したものである．

定理4が我々が目標とした結果である．

系4は定理4で得られる trace の無限テンソル積の carrier の計算であり，これを使うことにより $\otimes \mathfrak{A}_\iota$ の finite part がはっきりするが，$P_{C(\alpha)}$ 自体がわかり易いとは云えない．他の $C(\alpha)' \in \Gamma(\alpha)$ $(\neq C(\alpha))$ に対し，$\otimes^{C(\alpha)'} \mathfrak{H}_\iota$ 上での $\otimes \mathfrak{A}_\iota$

の様子は余りわかっていない．これを調べることは $\otimes\mathfrak{a}_\iota$ の構造を調べる上で非常に重要であるが，可換の場合に無限次元ベクトル空間上で得られる測度の carriers の計算の難かしさから推して，困難な問題の一つであると思われる．

今後の問題の設定の仕方も例えば上に述べたように $\otimes\mathfrak{a}_\iota$ の finite part と purely infinite な part をどのようにつかまえしかもそれをどのように分類するかとか，これと関連してテンソル積 $\otimes\mathfrak{a}_\iota$ から見てねじれの入った trace はどのようにしたらつかまえられるかなどといろいろあると思うが，その際無限テンソル積 $\otimes\mathfrak{a}_\iota$ の解釈の仕方が問題になる．そこで例えば添字集合 I を3次元ユークリッド空間の格子点と見なし空間的広がりを持たせたり，I を抽象的に局所コンパクト群と見なしその上で変換群を考えたり，また各 $\mathfrak{a}_\iota$ 上に時間の径数を持つ準同形写像 $\Phi_\iota(t)$ を入れて $\Phi(t)=\otimes\Phi_\iota(t)$ をうまく定義したりすれば，我々の追求すべき問題もかなり具体性を帯びてくるものと思われる．

§4. 補遺．

日本でも無限次元ベクトル空間上の測度に興味を持っている多くの人達がいる．例えば，山崎（梅村）[Measure on infinite dimensional vector spaces. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1 (1965), 1–47]

佐藤 [Gaussian measures on a Banach space and abstract Wiener measure. J. Math. Soc. Japan, to appear] 等であり，またこの種の測度をもとにして定常過程や調和解析の仕事も成されている，飛田・池田 [Analysis on Hilbert space arising from the reproducing kernel and multiple Wiener integral. Fifth Berkley Symp. II, Univ. Calif. Press (1967), 117–144]，飛田 [Stationary stochastic processes. White noise. Lecture note, Princeton Univ., 1967]，飛田・久保・野本・吉沢 [On projective invariance of Brownian motion. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 4 (1968), 595–609]，佐藤 [A family of one parameter subgroup of $O(\mathcal{S}_r)$ arising from the variable change of white noise. to appear]，特に最後の二つは無限次元回転群を扱ったものであり，その中で有限次元回転群の極限として得られないものまで扱っているので，この結果と，自己共役作用素のスペクトルを扱う際に固有関数の空間をヒルベルト空間から一般関数の空間まで拡張することにより連続スペクトルが固有値としてつかまえられる事実とを考慮することにより von Neumann algebra に新たな情報が提供されないであろうか？ 特に富田 [4] の中に見られる多くの超関数論的な手法は核型空間的な取り扱いが作用素環としても有用であることを示しているような気がする．

参 考 文 献

[1] ARAKI, H. AND E. J. WOODS, A classification of factors. Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3 (1968), 51–130.

[2] DIXMIER, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[3] NAKAGAMI, Y., Infinite tensor products of von Neumann algebras. Kōdai Math. Sem. Rep. to appear.

[4] TOMITA, M., Standard forms of von Neumann algebras. 1–80. preprint.

[5] VON NEUMANN, J., On infinite direct products. Compositio Math. 6 (1938), 1–77.

[3] の中での誤りを御指摘下さった梅垣先生，竹之内先生を始めとする皆様方に心から感謝致します．